NO DATE 30/03/17

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Αποδ.

Καταρχήν εφόσον η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ θα είναι φραγμένη (άρα έχει νόημα να μιλήσουμε για ολοκλήρωμα Riemann).

Επίσης η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta>0$ ώστε για κάθε $x,y\in[a,b]$ αν $|x-y|<\delta$ τότε

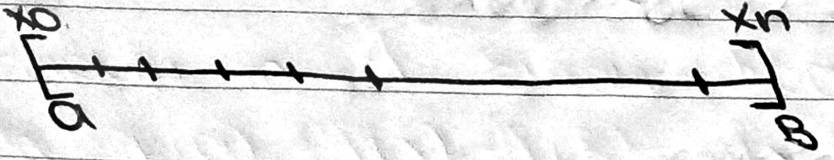
$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n}<\delta$. και θεωρούμε την διαμέριση:

$$P=\{\underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}}<x_1<x_2<\dots<\underset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}\}$$ η οποία

χωρίζει το $[a,b]$ σε n διαστήματα ίσου μήκους.

$$x_k=a+k\frac{b-a}{n}$$



Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1},x_k]$ λαμβάνει σε αυτό μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή $\exists\ \gamma_k,\delta_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $f(\gamma_k)\le f(x)\le f(\delta_k)$, $\forall x\in[x_{k-1},x_k]$

(για $k=1,\dots,n$)

NO DATE

Εφόσον το μήκος του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$

προκύπτει: $|\delta_k - \gamma_k| < \delta$
και άρα $|f(\delta_k) - f(\gamma_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$M_k - m_k = f(\delta_k) - f(\gamma_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Επομένως:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \frac{b-a}{n} = \varepsilon$$

Επομένως από το κριτήριο Riemann η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Γραμμικότητα του Ολοκληρώματος

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $c \in \mathbb{R}$. Τότε η cf είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b cf(x) = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Απόδειξη

Διακρίνω περιπτώσεις:

NO DATE

i) Αν $c=0$, τότε cf είναι μηδενική συνάρτηση και το συμπέρασμα είναι προφανές.

ii) Αν $c>0$,
Έστω $P=\{x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n\}$, $x_0=a$, $x_n=B$

τυχαία διαμέριση του $[a,B]$.

$m_k=\inf\{f(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k=\sup\{f(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$(k=1,\ldots,n)$

Θέτοντας $m_k'=\inf\{c\cdot f(x)\}$ και

$M_k'=\sup\{cf(x)\}$

έχουμε $m_k'=c\cdot m_k$ και $M_k'=cM_k$

$$L(cf,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k'(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$=c\cdot L(f,P)$$

$$U(cf,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k'(x_k-x_{k-1})=c\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$$

$$=c\cdot U(f,P)$$

$$\int_a^B cf(x)dx=\sup\{L(cf,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,B]\}$$
$$=\sup\{cL(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,B]\}$$
$$=c\cdot\sup\{L(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,B]\}$$
$$=c\int_a^B f(x)dx \quad (1)$$

NO DATE

και ομοίως $\overline{\int_a^B} cf(x)\,dx = c \cdot \overline{\int_a^B} f(x)\,dx$. (2)

εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη:

$$\underline{\int_a^B} f(x)\,dx = \overline{\int_a^B} f(x)\,dx$$

$$\underline{\int_a^B} cf(x)\,dx = \overline{\int_a^B} cf(x)\,dx$$

και άρα από τις (1) και (2) η cf είναι ολοκληρώσιμη και:

$$\int_a^B cf(x)\,dx = c\int_a^B f(x)\,dx.$$

iii) Αν $c<0$

έστω $P=\{\underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}} < x_1 < x_2 < \dots < \underset{B}{\overset{\shortparallel}{x_n}}\}$

τυχαία διαμέριση του $[a,B]$

$m_k = \inf\{f(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k = \sup\{f(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$(k=1,\dots,n)$

Θέτουμε $m_k' = \inf\{cf(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k' = \sup\{cf(x),\ x\in[x_{k-1},x_k]\}$

NO DATE

Έχουμε: $m_k' = cM_k$ και $M_k' = cm_k$ $(k=1,\dots,n)$

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k'(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$= cU(f,P)$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k'(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$= c \cdot L(f,P)$$

$$\underline{\int_a^b} cf(x)dx = \sup\{L(cf,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,b]\}$$
$$= \sup\{c \cdot U(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,b]\}$$
$$= c \cdot \inf\{U(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,b]\}$$
$$= c \cdot \overline{\int_a^b} f(x)dx. \quad (3)$$

και $$\overline{\int_a^b} cf(x)dx = \inf\{U(cf,P),\ P \text{ διαμ. του } [a,b]\}$$
$$= \inf\{c\,L(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,b]\}$$
$$= c \cdot \sup\{L(f,P),\ P \text{ διαμερ. του } [a,b]\}$$
$$= c\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad (4)$$

Εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη
$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$
από τις (3) και (4) η cf είναι ολοκληρώσιμη και:
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

NO DATE

Θεώρημα: Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Η $f+g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x)+g(x))\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

Απόδειξη

Έστω $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta\}$ τυχαία διαμέριση του $[\alpha, \beta]$.

Για κάθε $k = 1, \dots, n$ θέτουμε:

$m_k^f = \inf\{f(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k^f = \sup\{f(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$m_k^g = \inf\{g(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k^g = \sup\{g(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$m_k^{f+g} = \inf\{f(x)+g(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$M_k^{f+g} = \sup\{f(x)+g(x), \ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Για κάθε $k = 1, \dots, n$ και $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$m_k^f + m_k^g \leq f(x) + g(x)$

και άρα $m_k^f + m_k^g \leq m_k^{f+g}$

Ομοίως για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$f(x)+g(x) \leq M_k^f + M_k^g$

και άρα $M_k^{f+g} \leq M_k^f + M_k^g$

NO DATE

Άρα $L(f,P)+L(g,P)=L(f+g,P)$
$$=U(f+g,P)$$
$$\leq U(f,P)+U(g,P)$$

(ii) Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του $[\alpha,\beta]$ ώστε: $U(f,P_1)-\frac{\varepsilon}{2}<\int_\alpha^\beta f(x)dx<L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}$

$$U(g,P_2)-\frac{\varepsilon}{2}<\int_\alpha^\beta g(x)dx<L(f,P_2)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Θέτουμε $P=P_1\cup P_2$ (την κοινή εκλέπτυνση των P_1, P_2)

$$U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon\leq U(f,P_1)+U(g,P_2)-\varepsilon$$
$$<\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$$
$$<L(f,P_1)+L(g,P_2)+\varepsilon$$
$$<L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon.$$

$$\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)+g(x)dx-\varepsilon\leq U(f+g,P)-\varepsilon$$
$$\leq U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon$$
$$<\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$$
$$<L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon$$
$$\leq L(f+g,P)+\varepsilon$$
$$\leq \underline{\int_\alpha^\beta}(f+g)(x)dx+\varepsilon$$

Εφόσον η προηγούμενη ισότητα ισχύει για κάθε ε>0

$$\overline{\int_a^\beta} f(x)+g(x)dx \le \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$$

$$\le \underline{\int_a^\beta} f(x)+g(x)\,dx.$$

Εφόσον $\underline{\int_a^\beta} (f+g)(x)\,dx \le \overline{\int_a^\beta} (f+g)(x)\,dx.$

Προκύπτει ότι η f+g είναι ολοκληρώσιμη

$$\int_a^\beta f(x)+g(x)\,dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx.$$

<u>Πόρισμα</u>: Αν $f,g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $a,\beta\in\mathbb{R}$ τότε η $\lambda f+\mu g$ ολοκληρώσιμες <u>και</u>:

$$\int_a^\beta \lambda f(x)+\mu g(x)dx = \lambda\cdot\int_a^\beta f(x)dx + \mu\int_a^\beta g(x)dx.$$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f,g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες

Τότε η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: Παραλείπεται

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ!!}}$ NO DATE

ΔΕΝ ισχύει $\int fg = \int f \cdot \int g$!!!

Θεώρημα

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$.

$\forall k = 1, \ldots, n$

$\forall x, y \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\big| |f(x)| - |f(y)| \big| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_k^f - m_k^f$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

$$M_k^{|f|} - m_k^{|f|} \leq M_k^f - m_k^f$$

Επομένως $U(|f|, P) - L(|f|, P) \leq U(f,P) - L(f,P)$

Επομένως χρησιμοποιώντας το κριτήριο Riemann η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση: Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, τότε:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Απόδειξη

Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$: $m(b-a) \leq L(f,P)$

$$U(f,P) \leq M(b-a)$$

NO DATE

Πρόταση

α) Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

β) f,g ολοκληρώσιμες με $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Απόδειξη

α) Άμεσο από προηγούμενη πρόταση.

β) $g=f+(g-f)$, όπου f,g ολοκληρώσιμες.

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\underbrace{\int_\alpha^\beta (g-f)(x)\,dx}_{\geq 0}$$

διότι $g(x)-f(x)\geq 0,\forall x$

$$\geq\int_\alpha^\beta f(x)dx$$